Une petite introduction à la cohomologie des groupes finis

Giancarlo Lucchini Servetto

28 Avril 2010

Introduction

Ces pages contiennent les notes d'un exposé fait pour le séminaire M2 organisé par Martin Orr à Paris 11 (Orsay). Essentiellement, on suit l'introduction à la cohomologie des groupes de [1], chapitre 1, §2. Toutes les remarques sur ces notes sont bienvenues $\ddot{\smile}$.

On fixe un groupe fini G et un G-module A, i.e. un groupe abélien avec une action (à gauche) de G respectant la loi de groupe de A :

$$^{\sigma}(a+b) = {^{\sigma}a} + {^{\sigma}b}, \quad \sigma \in G,\ a, b \in A.$$

Remarque A est un G-module $\Leftrightarrow$ A est un module sur l'anneau $\mathbb{Z}[G]$ $\Leftrightarrow$ A est abélien et il existe un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Aut}A$.

1 Définition de $H^n(G, A)$

Pour définir les groupes de cohomologie, on va avoir besoin des projections

$$d_i : G^{n+1} \to G^n,\ (\sigma_0, \ldots, \sigma_n) \mapsto (\sigma_0, \ldots, \hat{\sigma_i}, \ldots, \sigma_n),$$

où le symbole $\hat{}$ veut dire qu'on n'écrit pas ce terme. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ les G-modules $X^n = X^n(G, A) := \mathrm{Map}(G^{n+1}, A)$, où l'action de G est donnée par

$$(^{\sigma}x)(\sigma_0, \ldots, \sigma_n) = {^{\sigma}(x(\sigma^{-1}\sigma_0, \ldots, \sigma^{-1}\sigma_n))}.$$

Les projections d_i induisent des morphismes de G-modules

$$d_i^* : X^{n-1} \to X^n,\ x \mapsto x \circ d_i.$$

A l'aide de ces morphismes, on définit pour $n \geq 1$,

$$\partial^n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^* : X^{n-1} \to X^n,$$

ce qui donne en évaluant,

$$(\partial^n x)(\sigma_0, \ldots, \sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x(\sigma_0, \ldots, \hat{\sigma_i}, \ldots, \sigma_n). \tag{1}$$

Finalement, on définit le morphisme $\partial^0 : A \to X^0$, $a \mapsto x_a$, où $x_a(\sigma) = a$ pour tout $\sigma \in G$.

Proposition 1.1. *La suite*

$$0 \to A \xrightarrow{\partial^0} X^0 \xrightarrow{\partial^1} X^1 \xrightarrow{\partial^2} X^2 \to \cdots$$

est exacte.

Démonstration. Montrons d'abord que la suite est un complexe, i.e. $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$ pour $n \geq 0$. Pour $n = 0$ c'est clair. Pour $n \geq 1$, en utilisant l'équation (1) pour $\partial^{n+1} \circ \partial^n$, on trouve une somme d'éléments de la forme $\pm x(\sigma_0, \ldots, \hat{\sigma_i}, \ldots, \hat{\sigma_j}, \ldots, \sigma_{n+1})$. Or, ce n'est pas trop difficile de noter que pour chaque couple (i, j), cet élément apparait deux fois, l'une avec le signe $(-1)^i(-1)^j$ et l'autre avec le signe $(-1)^i(-1)^{j-1}$, donc leur somme fait zêro.

Pour l'exactitude, on applique ce qu'on appelle en algèbre homologique une *homotopie contractante*, i.e. on définit des applications

$$D^{-1} : X^0 \to A,\ x \mapsto x(1)$$
$$D^n : X^{n+1} \to X^n,\ x \mapsto [D^n x : (\sigma_0, \ldots, \sigma_n) \mapsto x(1, \sigma_0, \ldots, \sigma_n)],$$

et avec un calcul assez rapide on trouve l'égalité, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n \circ \partial^{n+1} + \partial^n \circ D^{n-1} = \mathrm{id}_{X^n}.$$

Maintenant, si $x \in \mathrm{Ker}\partial^{n+1}$, on trouve $x = \partial^n(D^{n-1}x)$, i.e. $x \in \mathrm{Im}\partial^n$, ce qui donne l'exactitude. [$\ddot\smile$]

Remarque Les D^n définis dans la démonstration ne sont pas forcément des morphismes de G-modules, mais ils sont des morphismes de groupes, ce qui suffit pour montrer l'exactitude de la suite.

C'est une déformation de cette suite ce qui va nous donner les groupes de cohomologie. On a besoin d'encore une définition.

Définition 1.2. Le groupe abélien $C^n = C^n(G, A) := X^n(G, A)^G$ des éléments de $X^n(G, A)$ fixés pas l'action de G est appelé l'ensemble des n-cochaînes de G à valeurs dans A.

Notons qu'on peut regarder cet ensemble comme les applications $G \to A$ telles que

$$x(\sigma\sigma_0, \ldots, \sigma\sigma_n) = {}^{\sigma}(x(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)) \quad \forall \sigma \in G.$$

Il n'est pas trop difficile de noter que les fonctions induites $\partial^n : C^{n-1} \to C^n$ sont bien définies et alors on a un complexe

$$C^0 \xrightarrow{\partial^1} C^1 \xrightarrow{\partial^2} C^2 \to \cdots$$

qui, en général, n'est plus exacte.

Définition 1.3. Les groupes $Z^n = Z^n(G, A) := \mathrm{Ker}\partial^{n+1}$ et $B^n = B^n(G, A) := \mathrm{Im}\partial^n$ sont appelés les ensembles des n-cocycles et des n-cobords de G à valeurs dans A. On définit $B^0(G, A) := 0$.
Le groupe $H^n = H^n(G, A) := Z^n(G, A)/B^n(G, A)$ est appelé le n-ième groupe de cohomologie de G à valeurs dean A.

Pour faire les calculs un peu plus simples (et pour autant d'autres raisons), il convient d'introduire ce qu'on appelle les *n-cochaînes non homogènes*. Elles sont définies par

$$\mathcal{C}^0 := A$$
$$\mathcal{C}^n := \mathrm{Map}(G^n, A), \quad n \geq 1,$$

et on a des isomorphismes

$$C^0(G,A) \to \mathcal{C}^0(G,A),\ x \mapsto x(1)$$
$$C^n(G,A) \to \mathcal{C}^n(G,A),\ x \mapsto (y : (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \mapsto x(1, \sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \ldots, \sigma_1 \ldots \sigma_n)).$$

Pour le deuxième on a l'inverse,

$$y \mapsto [x : (\sigma_0, \ldots, \sigma_n) \mapsto {}^{\sigma_0}(y(\sigma_0^{-1}\sigma_1, \ldots, \sigma_0^{-1}\sigma_n))].$$

A travers ces identifications, les morphismes ∂^n définissent des morphismes $\mathcal{C}^{n-1} \to \mathcal{C}^n$ (que l'on notera encore par ∂^n). Ces morphismes sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned}
&(\partial^1 a)(\sigma) = {}^{\sigma}a - a, && a \in \mathcal{C}^0 = A\\
&(\partial^2 y)(\sigma,\tau) = {}^{\sigma}(y(\tau)) - y(\sigma\tau) + y(\sigma), && y \in \mathcal{C}^1\\
&(\partial^3 y)(\sigma,\tau,\upsilon) = {}^{\sigma}(y(\tau,\upsilon)) - y(\sigma\tau,\upsilon) + y(\sigma,\tau\upsilon) - y(\sigma,\tau), && y \in \mathcal{C}^2\\
&(\partial^{n+1} y)(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}) = {}^{\sigma_1}(y(\sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1}))\\
&+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i y(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_i\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \ldots, \sigma_{n+1}) + (-1)^{n+1} y(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), && y \in \mathcal{C}^n.
\end{aligned}$$

Ces formules nous permettront de faire des calculs explicites dans les sections qui suivent. On identifiera Z^n, B^n et H^n avec les sous quotients de $\mathcal{C}^n$ respectifs.

2 Caractérisation de $H^2(G,A)$

On garde les notations de la section précedente. En particulier on rappelle qu'on a un morphisme $\varphi : G \to \mathrm{Aut}A$.

Définition 2.1. Une extension de G par A est une suite exacte de groupes :

$$0 \to A \to E \to G \to 0.$$

Pour abréger, on la notera simplement par E.

Soit E une telle extension. Pour chaque $\sigma \in G$, on prend une préimage $\hat{\sigma} \in E$. L'application $\sigma_\# : a \mapsto \hat{\sigma} a \hat{\sigma}^{-1}$ définit un automorphisme de A. On note facilement que cet automorphisme ne dépend pas du choix de $\hat{\sigma}$. Ceci nous donne une application $G \to \mathrm{Aut}A$, $\sigma \mapsto \sigma_\#$ qui est en fait un morphisme de groupes. Dit d'une autre façon, l'extension E induit une (autre !) structure de G-module sur A, où l'action est donnée par ${}^{\sigma_\#}a = \sigma_\#(a) = \hat{\sigma} a \hat{\sigma}^{-1}$.

Question Quelles sont, à isomorphisme près, les extensions de G par A telles que le morphisme $G \to \mathrm{Aut}A$ induit soit φ ?

En d'autre mots, on cherche les E telles que l'action induite de G sur A soit celle fixée au début. La réponse à cette question on la formule comme un théorème. On appelle $\mathrm{EXT}(A,G)$ l'ensemble de classes d'isomorphismes de telles extensions.

Théorème 2.2. (Schreier) *On a une bijection canonique* $H^2(G,A) \cong EXT(A,G)$.

Notation Maintenant on regarde le groupe abélien A immergé dans E, qui n'est pas en général abélien. On change alors à notation multiplicative pour A. De plus, on écrira $x_{\sigma,\tau}$ au lieu de $x(\sigma,\tau)$. Dans cette notation, x est un 2-cocycle s'il vérifie l'équation

$$x_{\sigma,\tau} x_{\sigma\tau,\upsilon} = {}^{\sigma}x_{\tau,\upsilon} x_{\sigma,\tau\upsilon}, \tag{2}$$

et il est un 2-cobord s'il est de la forme

$$x_{\sigma,\tau} = y_\sigma {}^\sigma y_\tau y_{\sigma\tau}^{-1}, \quad y \in \mathcal{C}^1.$$

On notera $\mathrm{Cl}(x)$ pour la classe d'un n-cocycle x dans H^n.

Démonstration. On définit $\lambda : \mathrm{EXT}(A, G) \to H^2(G, A)$ comme suit :
Soit $E \in \mathrm{EXT}(A, G)$. On choisit pour chaque $\sigma \in G$ un représentant $\hat\sigma \in E$. Alors pour $\gamma \in E$ on a une écriture unique $\gamma = a\hat\sigma$ avec $a \in A$, $\sigma \in G$. Notons aussi que l'on a $\hat\sigma a = \hat\sigma a \hat\sigma^{-1}\hat\sigma = {}^\sigma a\hat\sigma$.
On veut définir un cocycle. Pour cela, notons que $\hat\sigma\hat\tau$ et $\widehat{\sigma\tau}$ ont la même image dans G. Alors il existe un unique $x_{\sigma,\tau} \in A$ tel que $\hat\sigma\hat\tau = x_{\sigma,\tau}\widehat{\sigma\tau}$. On affirme que $x_{\sigma,\tau}$ est un cocycle. En fait, en utilisant la associativité de la multiplication dans E on a

$$\begin{aligned}
(\hat\sigma\hat\tau)\hat\upsilon &= x_{\sigma,\tau}\widehat{\sigma\tau}\hat\upsilon = x_{\sigma,\tau}x_{\sigma\tau,\upsilon}\widehat{\sigma\tau\upsilon} \\
\hat\sigma(\hat\tau\hat\upsilon) &= \hat\sigma x_{\tau,\upsilon}\widehat{\tau\upsilon} = {}^\sigma x_{\tau,\upsilon}\hat\sigma\widehat{\tau\upsilon} = {}^\sigma x_{\tau,\upsilon}x_{\sigma,\tau\upsilon}\widehat{\sigma\tau\upsilon},
\end{aligned}$$

et donc $x_{\sigma,\tau}x_{\sigma\tau,\upsilon} = {}^\sigma x_{\tau,\upsilon}x_{\sigma,\tau\upsilon}$, comme on voulait. On pose alors $\lambda(E) = \mathrm{Cl}(x)$.
Vérifions que λ est bien définie. Pour chaque $\sigma \in G$, soit $\tilde\sigma \in E$ un autre représentant. On a alors $\tilde\sigma = y_\sigma\hat\sigma$ pour certain $y_\sigma \in A$. Soit $\tilde x$ le cocycle obtenu par ces représentants, i.e. $\tilde\sigma\tilde\tau = \tilde x_{\sigma,\tau}\widetilde{\sigma\tau}$. On trouve les égalités,

$$\tilde\sigma\tilde\tau = \tilde x_{\sigma,\tau}\widetilde{\sigma\tau} = \tilde x_{\sigma,\tau}y_{\sigma\tau}\widehat{\sigma\tau} = \tilde x_{\sigma,\tau}y_{\sigma\tau}x_{\sigma,\tau}^{-1}\hat\sigma\hat\tau = \tilde x_{\sigma,\tau}x_{\sigma,\tau}^{-1}y_{\sigma\tau}y_\sigma^{-1}\tilde\sigma y_\tau^{-1}\tilde\tau = \tilde x_{\sigma,\tau}x_{\sigma,\tau}^{-1}y_{\sigma\tau}y_\sigma^{-1}{}^\sigma y_\tau^{-1}\tilde\sigma\tilde\tau,$$

d'où on en tire

$$\tilde x_{\sigma,\tau} = x_{\sigma,\tau}y_{\sigma,\tau} \quad \text{avec} \quad y_{\sigma,\tau} = y_\sigma {}^\sigma y_\tau y_{\sigma\tau}^{-1}.$$

On en déduit donc que $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(\tilde x)$.
D'autre part, si E' est une extension isomorphe à E, i.e. si l'on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \mathrm{id}\downarrow & & f\downarrow & & \downarrow\mathrm{id} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

alors pour $\sigma \in G$, l'élément $f(\hat\sigma) \in E'$ en est un représentant. On note alors que le cocyle induit par cette section est le même. En fait,

$$f(\hat\sigma)f(\hat\tau) = f(\hat\sigma\hat\tau) = f(x_{\sigma,\tau}\widehat{\sigma\tau}) = f(x_{\sigma,\tau})f(\widehat{\sigma\tau}) = x_{\sigma,\tau}f(\widehat{\sigma\tau}).$$

Donc λ est bien définie.

Injectivité : Supposons $\lambda(E) = \lambda(E')$. En prenant des représentants $\hat\sigma \in E$, $\hat\sigma' \in E'$ de $\sigma \in G$, on trouve des cocycles x et x' tels que $x'_{\sigma,\tau} = x_{\sigma,\tau}y_\sigma {}^\sigma y_\tau y_{\sigma\tau}$ pour une certaine $y \in \mathcal{C}^1$. Alors, quitte à changer $\hat\sigma'$ par $y_\sigma^{-1}\hat\sigma'$, on peut supposer que ces deux sections induisent le même cocycle x. On définit une application $f : E \to E'$ par $f(a\hat\sigma) = a\hat\sigma'$. C'est clairement une application bijective qui induit l'identité sur A et G. Il suffit de montrer que c'est un morphisme de groupes, ce qui est clair d'après

$$f(a\hat\sigma b\hat\tau) = f(a {}^\sigma b\hat\sigma\hat\tau) = f(a {}^\sigma b x_{\sigma,\tau}\widehat{\sigma\tau}) = a {}^\sigma b x_{\sigma,\tau}\widehat{\sigma\tau}' = a {}^\sigma b\hat\sigma'\hat\tau' = a\hat\sigma' b\hat\tau'.$$

On a donc $E \cong E'$ et λ est injective.

Surjectivité : Soit x un 2-cocycle. On peut supposer qu'il est tel que $x_{\sigma,1} = x_{1,\sigma} = 1$. En fait, de l'équation (2) on obtient facilement les égalités $x_{\sigma,1} = {}^\sigma x_{1,1}$ et $x_{1,\sigma} = x_{1,1}$ et alors en posant $y_\sigma = x_{1,1}$ pour tout $\sigma \in G$ et $y_{\sigma,\tau} = y_\sigma {}^\sigma y_\tau y_{\sigma\tau}^{-1} = {}^\sigma x_{1,1}$, on trouve que xy^{-1} vérifie

cette propriété.
Il s'agit alors de construire une extension de G par A qui induisse x et telle que l'action induite de G sur A soit la bonne. On pose $E = A \times G$ avec le produit

$$(a, \sigma)(b, \tau) = (x_{\sigma,\tau} a^{\sigma} b, \sigma\tau).$$

On vérifie l'associativité :

$$\begin{aligned}
[(a, \sigma)(b, \tau)](c, \upsilon) = (x_{\sigma,\tau} a^{\sigma} b, \sigma\tau)(c, \upsilon) = (x_{\sigma\tau,\upsilon} x_{\sigma,\tau} a^{\sigma} b^{\sigma\tau} c, \sigma\tau\upsilon) = \\
(x_{\sigma,\tau\upsilon}{}^{\sigma} x_{\tau,\upsilon} a^{\sigma} b^{\sigma\tau} c, \sigma\tau\upsilon) = (a, \sigma)(x_{\tau,\upsilon} b^{\tau} c) = (a, \sigma)[(b, \tau)(c, \upsilon)].
\end{aligned}$$

L'élément neutre est $(1, 1)$. En fait,

$$\begin{aligned}
(1, 1)(a, \sigma) = (x_{1,\sigma} a, \sigma) = (a, \sigma), \\
(a, \sigma)(1, 1) = (x_{\sigma,1} a, \sigma) = (a, \sigma).
\end{aligned}$$

L'inverse de (a, σ) est donné par $({}^{\sigma^{-1}}(x_{\sigma,\sigma^{-1}} a)^{-1}, \sigma^{-1})$. En fait,

$$(a, \sigma)({}^{\sigma^{-1}}(x_{\sigma,\sigma^{-1}} a)^{-1}, \sigma^{-1}) = (x_{\sigma,\sigma^{-1}} a x^{-1}_{\sigma,\sigma^{-1}} a^{-1}, \sigma\sigma^{-1}) = (1, 1).$$

Finalement, on note que l'action de G sur A induite par E est la bonne : C'est clair que $(1, \sigma)$ représente σ. Alors,

$$(1, \sigma)(a, 1)(1, \sigma)^{-1} = (x_{\sigma,1}{}^{\sigma} a, \sigma)({}^{\sigma^{-1}}(x_{\sigma,\sigma^{-1}})^{-1}, \sigma^{-1}) = (x_{\sigma,\sigma^{-1}} x_{\sigma,1}{}^{\sigma} a x^{-1}_{\sigma,\sigma^{-1}}, 1) = ({}^{\sigma} a, 1).$$

Ceci nous montre que $E \in \mathrm{EXT}(A, G)$ et $\lambda(E) = \mathrm{Cl}(x)$, car $(1, \sigma)(1, \tau) = (x_{\sigma,\tau}, \sigma\tau)$. $[\ddot\smile]$

Avec ce résultat on peut répondre la moitié la plus facile de la question sur les extensions de groupes finis. Il suffit juste de classifier les morphismes $G \to \mathrm{Aut}(A)$ (ce qui n'est pas trop difficile lorsque A est abélien) et après calculer $H^2(G, A)$ pour chacune de ces structures de G-modules. Pour répondre la question plus général, il faut enlèver l'hypothèse A abélien, ce qui nous ramène à la cohomologie non abélienne. On en parlera un peu dans la section suivante.

3 Caractérisation de $H^1(G, A)$

On commence en rappellant la définition des 1-cocycles et 1-cobords.

$$Z^1(G, A) = \{x : G \to A | x_{\sigma,\tau} = x_{\sigma}{}^{\sigma} x_{\tau}\} \quad B^1(G, A) = \{x : G \to A | x_{\sigma} = {}^{\sigma} a a^{-1},\ a \in A\}.$$

Remarque Si l'action de G sur A est triviale, alors $B^1 = 0$ et $H^1(G, A) = \mathrm{Hom}(G, A)$.

Une façon de décrire H^1, c'est en disant qu'il mesure le "défaut d'exactitude" au moment de prendre les éléments fixés par G, i.e. si l'on a une suite exacte de G-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0,$$

alors la suite

$$0 \to A^G \xrightarrow{\alpha^G} B^G \xrightarrow{\beta^G} C^G$$

reste exacte, mais en général la restriction β^G de β n'est plus surjective. Il se trouve que lorsque $H^1(G, A) = 0$, on a cette surjectivité. Plus précisement, on un morphisme canonique $\delta : C \to H^1(G, A)$ qui rend exacte la suite

$$0 \to A^G \xrightarrow{\alpha^G} B^G \xrightarrow{\beta^G} C^G \xrightarrow{\delta} H^1(G, A).$$

En fait, Pour $c \in C^G$ on peut toujours choisir $b \in B$ tel que $\beta(b) = c$. Pour $\sigma \in G$, on a $\beta({}^\sigma b b^{-1}) = {}^\sigma c c^{-1} = c c^{-1} = 1$. Alors ${}^\sigma b b^{-1} = a_\sigma \in A$ et on a, pour $\sigma, \tau \in G$,

$$a_{\sigma\tau} = {}^{\sigma\tau} b b^{-1} = {}^{\sigma\tau} b {}^\sigma b^{-1} {}^\sigma b b^{-1} = {}^\sigma({}^\tau b b^{-1}) {}^\sigma b b^{-1} = {}^\sigma a_\tau a_\sigma.$$

Donc $a \in Z^1(G, A)$ et on pose $\delta(c) = \mathrm{Cl}(a)$. Cet élément ne dépend du choix de b, car $\beta(b') = c$ implique que $d = b' b^{-1} \in A$, donc $a'_\sigma = {}^\sigma b' b'^{-1} = {}^\sigma b {}^\sigma d d^{-1} b^{-1} = a_\sigma {}^\sigma d d^{-1}$ et $\mathrm{Cl}(a) = \mathrm{Cl}(a')$.
On vérifie facilement que si $c \in \mathrm{Im}(\beta^G)$, alors $\delta(c) = 1$ et inversement, si $\delta(c) = 1$, alors $a_\sigma = {}^\sigma b b^{-1} {}^\sigma d d^{-1}$ pour un certain $d \in A$, ce qui entraîne ${}^\sigma(b d^{-1}) = b d^{-1}$ et donc $b d^{-1} \in B^G$ et $\beta^G(b d^{-1}) = \beta(b) = c$.

Un peu de cohomologie non abélienne

A partir de maintenant, A n'est plus supposé abélien. La notion de module perdant son sens, on parle alors d'un G-groupe. Dans ce cas, presque tout ce qu'on a dit ne reste plus vrai en général. Il faut alors tout recommencer :

Définition 3.1. On définit les 1-cocycles comme l'ensemble $Z^1(G, A) := \{a : G \to A | a_{\sigma\tau} = a_\sigma {}^\sigma a_\tau,\ \sigma, \tau \in G\}$.
Deux cocycles a, a' sont dites cohomologues s'il existe $b \in A$ tel que $a'_\sigma = b^{-1} a_\sigma {}^\sigma b$. C'est une rélation d'équivalence. On définit $H^1(G, A)$ comme le quotient de $Z^1(G, A)$ par cette rélation.

Remarque Dans ce cadre Z^1 et H^1 ne sont plus des groupes. Ce sont au moins des ensembles pointés où l'élément distingué correspond au cocycle trivial $a_\sigma = 1$. On note aussi que lorsque A est abélien, on retrouve la définition classique. Pour plus d'information sur la cohomologie non abélienne, voir [2], chapitre 1, §5.

On passe maintenant à la caracterisation de H^1. Il nous faut encore quelques définitions.

Définition 3.2. Un G-ensemble est un ensemble X avec une action de G.
Un espace homogène sur A est un G-ensemble muni d'une action (à droite) transitive de A compatible avec celle de G, i.e. ${}^\sigma(xa) = {}^\sigma x {}^\sigma a$, $\sigma \in G$, $a \in A$, $x \in X$.
On parle d'espace principal homogène si l'action de A est en plus libre.

On laisse au lecteur le soin de définir la notion d'isomorphisme d'espaces homogènes sur A. Soit $\mathrm{TORS}(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'espaces principaux homogènes sur A. C'est un ensemble pointé et son élément distingué est A (l'action étant multiplication à droite). On a alors le théorème :

Théorème 3.3. *On a un isomorphisme canonique d'ensembles pointés $H^1(G, A) \cong TORS(A)$.*

Démonstration. On définit $\lambda : \mathrm{TORS}(A)(A) \to H^1(G, A)$ comme suit :
Soit $X \in \mathrm{TORS}(A)$. Pour $\sigma \in G$ il existe un unique $a_\sigma \in A$ tel que ${}^\sigma x = x a_\sigma$. On affirme que a est un cocycle. En fait, on a

$$x a_{\sigma\tau} = {}^{\sigma\tau} x = {}^\sigma(x a_\tau) = {}^\sigma x {}^\sigma a_\tau = x a_\sigma {}^\sigma a_\tau,$$

et donc $a_{\sigma\tau} = a_\sigma {}^\sigma a_\tau$. On pose $\lambda(X) = \mathrm{Cl}(a)$. Si on prend un autre point $y \in X$, on a $y = xb$, avec $b \in A$. On trouve alors un cocycle cohomologue à a en notant que

$${}^\sigma y = {}^\sigma(xb) = {}^\sigma x {}^\sigma b = x a_\sigma {}^\sigma b = (xb) b^{-1} a_\sigma {}^\sigma b = y b^{-1} a_\sigma {}^\sigma b.$$

D'autre part, si $f : X \to X'$ est un isomorphisme d'espaces homogènes, on trouve pour $x' = f(x) \in X'$:

$$^{\sigma}x' = {}^{\sigma}(f(x)) = f({}^{\sigma}x) = f(xa_{\sigma}) = f(x)a_{\sigma} = xa_{\sigma}.$$

On en déduit que λ est bien définie.

On définit une inverse $\mu : H^1(G,A) \to \mathrm{TORS}(A)$ comme suit :
Soit c une classe dans $H^1(G,A)$ et a un cocyle dans cette classe. On pose $X = A$ et on fait agir G sur X de la façon tordue suivante :

$$^{\sigma_X}x = a_{\sigma}{}^{\sigma}x, \quad x \in X = A.$$

Ceci est bien une action car, pour $\sigma, \tau \in G$, $x \in A$ on a

$$^{\sigma\tau_X}x = a_{\sigma\tau}{}^{\sigma\tau}x = a_{\sigma}{}^{\sigma}a_{\tau}{}^{\sigma}({}^{\tau}x) = a_{\sigma}{}^{\sigma}(a_{\tau}{}^{\tau}x) = {}^{\sigma_X}({}^{\tau_X}x).$$

A agit sur cet ensemble par multiplication à droite.
Montrons que cet espace est bien un espace principal homogène sur A. C'est clair que l'action de A est libre et transitive, donc il suffit de vérifier la compatibilité des actions. On a pour $\sigma \in G$, $x \in X$ et $b \in A$,

$$^{\sigma_X}(xb) = a_{\sigma}{}^{\sigma}(xb) = a_{\sigma}{}^{\sigma}x^{\sigma}b = {}^{\sigma_X}x^{\sigma}b,$$

ce qui montre l'affirmation.
On pose $\mu(c) = X$. Le morphisme ne dépend pas du choix du cocycle : Soit a' un cocycle cohomologue à a, i.e. $a'_{\sigma} = c^{-1}a_{\sigma}{}^{\sigma}c$ pour $c \in A$. On obtient alors un espace homogène Y qui est isomorphe à X à travers de $f : Y \to X$, $y \mapsto cy$. En fait, c'est clair que f est bijectif et c'est bien un morphisme, car pour $\sigma \in G$ et $y \in Y$,

$$^{\sigma_X}f(y) = {}^{\sigma_X}(cy) = a_{\sigma}{}^{\sigma}c^{\sigma}y = ca'_{\sigma}{}^{\sigma}y = c^{\sigma_Y}y = f({}^{\sigma_Y}y),$$

et f commute clairement avec l'action de A. Donc μ est bien définie. Finalement on vérifie sans difficulté que $\lambda \circ \mu = \mu \circ \lambda =$id et $\lambda(A) = \mathrm{Cl}(1)$. [$\ddot\smile$]

On conclut avec une citation textuelle du livre de Serre [2]. Après les définitions de H^0 et H^1 non abéliens il remarque : *On aurait envie de définir aussi $H^2(G,A)$, $H^3(G,A)$, ... Je ne m'y risquerai pas ; ...*
Ceci nous dit que l'idée d'étendre le Théorème 2.2 en une version non abélienne n'a probablement rien d'évident (déjà définir H^2 n'a rien d'évident !). Et même si aujourd'hui le H^2 non abélien existe déjà dans certains cas, il faut pas oublier qu'il reste toujours la question de classifier les morphismes $G \to \mathrm{Aut}(A)$. Et on sait bien que $\mathrm{Aut}(A)$ n'est pas trop gentil lorsque A n'est pas abélien. Donc peut être celui-ci n'est pas le chemin à suivre pour répondre à cette question.

Références

[1] J. Neukirch, A. Schmidt & K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, Springer, 2000

[2] J.P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, 5e édition, Springer, 1994